**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΗΝ ΑΝΑΛΥΣΗ**

**ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ – ΕΠΙΛΟΓΗ :ΣΑΛΕΒΟΥΡΑΚΗΣ ΒΑΣΙΛΗΣ**

1. Δίνεται η συνάρτηση f: R R, για την οποία ισχύει f(R)=R

 και x≤ f(f(x)) ≤ f(x), για κάθε x∈R.

 α) Να βρείτε το τύπο της f.

 β) Να βρείτε τις τιμές των α, β∈R ώστε το , να είναι πεπερασμένο,

 όπου g(x) = .

**2**. Δίνεται η συνάρτηση f ορισμένη και συνεχής και μη μηδενική στο [α, β],

 και ο μιγαδικός αριθμός z με Re(z).

 Αν να αποδείξετε ότι

 α) 

 β) f

 γ) η εξίσωση  έχει τουλάχιστον μία ρίζα

 στο διάστημα (-1, 1)

**3**. α) Να αποδείξετε ότι αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη στο Α,

 τότε η αντίστροφη f έχει το ίδιο είδος μονοτονίας

 β) Να αποδείξετε ότι το γινόμενο δύο γνησίως αυξουσών και

 θετικών συναρτήσεων, είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση

 γ) Έστω η συνάρτηση f(x) = 

i) Δείξτε ότι είναι 1-1 και βρείτε το σύνολο των τιμών της

ii) Δείξτε ότι η συνάρτηση g(x) = f(x)f είναι 1-1

iii)Να λύσετε τις εξισώσεις

  και f(x)f= 6f

**4.** α) Να διατυπώσετε το θεώρημα του Bolzano και να το ερμηνεύσετε

 γεωμετρικά.

 β) Να διατυπώσετε το θεώρημα του Rolle και να το ερμηνεύσετε

 γεωμετρικά.

 γ) Δίνεται η συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο [0, 1] με συνεχή παράγωγο,

 τέτοια ώστε: f(1)=f (0) + ½ και f ΄(0)>0. Να αποδείξετε ότι

 ί ) Αν g(x) = f(x) - , τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο της Cg,

 στο οποίο η εφαπτομένη είναι παράλληλη στον άξονα x΄x.

 ίί )Υπάρχει ένα τουλάχιστον x∈(0, 1), τέτοιο, ώστε f ΄( x) = 2 x.

**5**. Δίνονται οι συναρτήσεις f(x) = x και g(x) = 1 + 

 α) Να μελετηθούν ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα στο [1, e].

 β) Να εφαρμόσετε το Θ.Μ.Τ. για τη συνάρτηση φ(x) = ex, στο διάστημα

 

 γ) Να αποδείξετε ότι για κάθε x∈[1, e] ισχύει 2 x<2 + 3

**6.** (Θεώρημα Darboux) Δίνεται η συνάρτηση f : [α, β] R

 παραγωγίσιμη.

 α) Να δικαιολογήσετε ότι η f έχει ολικά ακρότατα.

 β) Να αποδείξετε ότι, αν η f παίρνει την ελάχιστη τιμή της στο α, τότε

 f ΄(α) 0, ενώ αν παίρνει την ελάχιστη τιμή της στο β, τότε f ΄(β)  0

 γ) Αν ισχύει f ΄(α) < 0 < f ΄(β), τότε να αποδείξετε ότι υπάρχει γ∈(α, β)

 ώστε f ΄(γ) = 0

 δ) Αν ισχύει f ΄(α) < κ < f ΄(β), τότε να αποδείξετε ότι υπάρχει

  x∈(α, β), ώστε f ΄( x) = κ.

[Σχόλιο: Σύμφωνα με το Θεώρημα Darboux η παράγωγος μιας συνάρτησης f: ΔR, όπου Δ διάστημα, έχει την ιδιότητα της ενδιάμεσης τιμής. Επιπλέον υπάρχουν παραγωγίσιμες συναρτήσεις των οποίων η παράγωγος είναι ασυνεχής όπως π.χ.

 xημ, x0

η f(x) = {

 0 , x = 0

Συνάγεται λοιπόν το συμπέρασμα ότι μια συνάρτηση που έχει την ιδιότητα της ενδιάμεσης τιμής, δεν είναι κατ’ ανάγκην συνεχής.

Παρατηρείστε ότι στο ερώτημα (γ) δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής αφού δεν δίνεται η συνέχεια της f ΄ ]

**7.** Δίνεται η συνάρτηση f : (0, +)R, τρείς φορές παραγωγίσιμη. Αν

 υπάρχουν α, β, γ > 0 με α <β<γ τέτοια, ώστε f(α) = α, f(β) = β και f(γ) = γ,

 να αποδείξετε ότι

 ί ) Υπάρχει ένα τουλάχιστον ξ(α, γ) ώστε f ΄΄(ξ) = 0

 ίί ) Υπάρχουν κ, λ > 0, ώστε f(κ) = κf ΄(κ) και f(λ) = λf ΄(λ)

 ίίί ) Αν επιπλέον η ευθεία που περνά από τα σημεία Α( κ, f(κ))

 Β(λ, f(λ)), περνά και από την αρχή των αξόνων, τότε να

 αποδείξετε ότι υπάρχει x> 0, ώστε f ΄΄( x) = 0.

 ίίίί) Στην περίπτωση που ισχύουν οι προϋποθέσεις του ερωτήματος ( ίίί )

 και ξ x, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f΄΄, έχει τουλάχιστον

 ένα πιθανό ακρότατο.

**8.** Δίνεται η συνάρτηση f : R, τέτοια ώστε f(xψ) = xf(ψ)+ψf(x)

 για κάθε x, ψ R Να αποδειχθεί ότι

 α) f(1) = 0

 β) αν η f είναι συνεχής στο 1, τότε είναι συνεχής στο R

 γ) αν η f είναι παραγωγίσιμη στο 1 με f ΄(1) = 2007, τότε η f είναι

 παραγωγίσιμη στο R

 δ) Να βρείτε το τύπο της f

**9.** Δίνεται η συνάρτηση f: R  R, για την οποία ισχύει η σχέση

 f(x+ψ) = f(x) + f(ψ) + 2ψe- xημψ – 1, για κάθε x, ψ R

 α) Να βρείτε το f(0)

 β) Αν η f είναι συνεχής στο 0, να δείξετε ότι είναι συνεχής στο R

 γ) Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο 0 με f ΄(0) = 1, τότε να αποδείξετε ότι

 είναι παραγωγίσιμη στο R

 δ) Να βρείτε το τύπο της f

 ε) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία, τα ακρότατα, την

 κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

 στ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f και και να δείξετε ότι η εξίσωση

 f(x) = 0 έχει μία μόνο πραγματική ρίζα

 ζ) Αν ξ η μοναδική ρίζα της εξίσωσης f(x) = 0, να μελετήσετε την f(x)

 ως προς το πρόσημο

**9Α.** Δίνεται η συνάρτηση f : R, τέτοια ώστε f(xψ) = xf(ψ)+ψf(x)

 για κάθε x, ψ R Να αποδειχθεί ότι

 α) f(1) = 0

 β) αν η f είναι συνεχής στο 1, τότε είναι συνεχής στο R

 γ) αν η f είναι παραγωγίσιμη στο 1 με f ΄(1) = 2007, τότε η f είναι

 παραγωγίσιμη στο R

 δ) Να βρείτε το τύπο της f

**9Β**. Δίνεται η συνάρτηση f :[0, 2] παραγωγίσιμη για την οποία ισχύει ότι

 f(0) >0, f(1) <  και f(2) >2. Να αποδειχθεί ότι

 α) η εξίσωση f(x) = , έχει ρίζες στα διαστήματα (0, 1) και (1, 2)

 β) υπάρχει ένα τουλάχιστο x ώστε f ΄(x) = x

**10**. Δίνεται η συνάρτηση f(x) = xln(x+1) – (x+1)lnx , x>0

α) Να αποδείξετε ότι ln(x+1) – lnx < 1/x , x > 0

β) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο (0, +

γ) Να υπολογίσετε το 

δ) Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικός α

**11**.α) Έστω μια συνάρτηση f, για την οποία ισχύει f(α)=f(β) = 0 και f΄΄(x)<0, για κάθε xє[α, β]. Να δείξετε ότι f(x)>0, για κάθε xє(α, β).

β)Αν για τη συνάρτηση g ισχύει, g΄΄(x)>0, για κάθε xє[α, β], να δείξετε ότι , για κάθε xє(α, β).

**12.**Δίνεται η συνάρτηση f (x) = 

 α) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f

 β) Να αποδείξετε ότι f(x)  για κάθε x > 0

 γ) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης ,χ>0

 δ) για τις διάφορες πραγματικές τιμές του γ να βρείτε το πλήθος των λύσεων

 της εξίσωσης 1-lnx = γx2

 δ) Αν 0<α<β< να αποδείξετε ότι f(β)

 ε) Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη Cf και τις

 ευθείες ψ=0, x=1 και x=e

**13.** Δίνεται η συνάρτηση f(x) = 

 α) Να κάνετε το πίνακα μεταβολών της f και να χαράξετε τη γραφική

 της παράσταση

 β) Να βρείτε το σύνολο των τιμών της f

 γ) Να αποδείξετε ότι 

 δ) Να αποδείξετε ότι , για κάθε γ > e

 ε) Να αποδείξετε ότι 

 στ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της Cf στο σημείο της με

 τετμημένη  και κατόπιν να αποδείξετε ότι lnx για

 κάθε xЄ (0, e)

 ζ) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης , καθώς το α

 διατρέχει το (0, +

 η) Να λύσετε την εξίσωση 2x = x2

**14.** Δίνεται η συνάρτηση f(x) = 

 α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία τα ακρότατα την

 κυρτότητα και τα σημεία καμπής

 β) Να μελετήσετε την οριακή συμπεριφορά της f και να προσδιορίσετε τις

 ασύμπτωτες της Cf

 γ) Να διερευνήσετε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης ,

 για τις διάφορες πραγματικές τιμές του α

 δ) Να βρείτε την εφαπτομένη της Cf στο σημείο Μ( και

 κατόπιν να μελετήσετε το πρόσημο της συνάρτησης

 h(x) = , στο διάστημα (1, +

 ε) Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον ξ ∈ (0, , τέτοιο

 ώστε 

**15**. Δίνεται η συνάρτηση f(x) = lnx

 α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της και το σύνολο των τιμών της

 β) Να προσδιορίσετε τις ασύμπτωτες της Cf

 γ) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων

 g(x) = e και h(x) = - έχουν ακριβώς μία κοινή εφαπτομένη

**16.** Δίνεται η συνάρτηση f(x) = 

 α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της και να τη μελετήσετε ως προς τη

 μονοτονία και τα ακρότατα

 β) Να βρείτε το σύνολο των τιμών της

 γ) Δείξτε ότι η εξίσωση  έχει ακριβώς δύο ρίζες

 στο (0, +

 δ) Δείξτε ότι για κάθε ν θετικό ακέραιο με ν ≥ 2 ισχύει 

**17**. α) Δίνεται η συνάρτηση f:(α, β) συνεχής και τέτοια ώστε

 = l και  = m. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση

  είναι συνεχής

 β) Έστω η συνάρτηση f(x) = . Nα βρείτε τα  και

  και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι η εξίσωση

 ημπx = x-1, έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο (-1, 1).

 [Να λύσετε το (β) και με έναν δεύτερο τρόπο χρησιμοποιώντας μόνο

 τις ιδιότητες των ορίων]

 γ) Έστω η συνάρτηση f(x) = xημ. Να βρείτε το πεδίο

 ορισμού της και τα  , . Τέλος να αποδείξετε ότι η

 Cf δέχεται οριζόντια εφαπτομένη.

 δ) Τα ίδια όπως στο (γ) ερωτήματα για τη συνάρτηση

 f(x) = xlnx – (1-x)ln(1-x)

 ε) Έστω η f(x) = . Να βρείτε το πεδίο ορισμού της και τα

 , .Να αποδείξετε ότι η Cf δέχεται εφαπτομένη

 παράλληλη στην ευθεία ψ = x+2

**18**. α) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f έχει κέντρο

 συμμετρίας το σημείο Κ(α, β), αν και μόνο αν f(x) + f(2α-x) = 2β

 β) Δίνεται η συνάρτηση f(x) = 

 i) Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία και τις ασύμπτωτες

 ii) Δείξτε ότι το σημείο Κ(0, 1) είναι κέντρο συμμετρίας της Cf

 iii) Να λύσετε την εξίσωση f(x) = 0 και να βρείτε την εξίσωση της

 εφαπτομένης της Cf στο κέντρο συμμετρίας της

 iv) Βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την Cf τον x΄x

 και τις ευθείες x = 0 και x = 3

 v) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την Cf

 και τις ευθείες x = -1, x = 1 και ψ = 1

**19**. Δίνεται η συνάρτηση f: R η οποία έχει σύνολο τιμών το R και

 ικανοποιεί τη σχέση , για κάθε x στο R

 α) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την 

 β) Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής

 γ) Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη και να βρείτε τη συνάρτηση f ΄

 ως έκφραση της f

 δ) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία

 ε) Να λυθεί η εξίσωση f(x) = 5

 στ) Να λυθεί η εξίσωση 

 ζ) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την Cf την

 C και την ευθεία x = 2

 η) Να υπολογίσετε το 

**20.** Δίνεται η συνεχής συνάρτηση f ορισμένη στο R για την οποία ισχύει

 .

α) Να αποδείξετε ότι f(0) = 0 και f ΄(0) = 1

β) Να βρείτε το λ έτσι ώστε 

γ) Αν επιπλέον η f είναι παραγωγίσιμη στο R με συνεχή παράγωγο και

 ισχύει

 f ΄(x) > f(x) για κάθε x στο R, να δείξετε ότι

 i) xf(x) > 0 για κάθε x ≠ 0

 ii) 

**21.** Έστω η συνάρτηση f συνεχής στο [α, β ], και μη αρνητική

 α) Αν υπάρχει  τέτοιο ώστε f(, δείξτε ότι 

 β) Αν =0 τότε f(x) = 0 για κάθε x στο [α, β]

 γ) Δίνεται η συνάρτηση g συνεχής στο [α, β] για την οποία ισχύει

 .Να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή

 στο [α, β]

**22**.α)Δίνεται η συνάρτηση f συνεχής στο [0, 1] και τέτοια ώστε 

 Να αποδειχθεί ότι υπάρχει  τέτοιο ώστε f(

β) Έστω η f συνεχής στο [0, 1] ώστε . Να αποδειχθεί ότι

 υπάρχει  τέτοιο ώστε 

γ) Έστω η συνάρτηση f συνεχής στο [0, 1] για την οποία ισχύει

 . Να δείξετε ότι υπάρχει

 

**25.** α) Να διατυπώσετε το θεώρημα του Fermat και να τεκμηριώσετε με

 αντιπαραδείγματα ότι i) είναι δυνατόν για μια παραγωγίσιμη συνάρτηση

 να ισχύει f ΄( σε ένα εσωτερικό σημείο του Π.Ο. χωρίς η f να

 παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο  και ii) η υπόθεση του θεωρήματος

 ότι το  είναι εσωτερικό σημείο του Π.Ο. είναι απαραίτητη για να

 ισχύει το συμπέρασμα

 β) Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο [α, β] και υπάρχουν κ, λ στο

 [α, β] ώστε f (κ) < f(α) < f(λ), τότε να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλ.

 ) ώστε f ΄(

 γ) Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο [α, β] με f (α) = f(β) = 0 και

 υπάρχουν κ, λ στο (α, β) τέτοια ώστε f(κ)f(λ) < 0 τότε να δείξετε ότι

 υπάρχει

 δ) Έστω η συνάρτηση g: [0, 3] , για την οποία ισχύει

 , για κάθε x στο [0, 3]. Να αποδειχθεί ότι g(2) = 12

 ε) Έστω η συνάρτηση f συνεχής στο R για την οποία ισχύουν : f(x) ≥ 0 και

  για κάθε x στο R.Nα βρείτε το εμβαδόν του

 χωρίου που περικλείεται από την Cf, τον x ΄x και τις ευθείες x = 0 και

 x = 1

 στ) Δίνεται η συνάρτηση f(x) = . Να βρείτε τη τιμή

 του m ώστε f(x) ≥ 0 , για κάθε x ∈ R

**27.** α) Δίνεται η συνάρτηση f συνεχής και γν. αύξουσα στο [α, β].

 Να αποδείξετε ότι 

 β) Να αποδείξετε ότι 

28. α) Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο [α, β] και αντιστρέψιμη, να

 αποδείξετε ότι 

 β) Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο [α, β] και αντιστρέψιμη, με

 f(α)=α και f(β) = β δείξτε ότι 

 γ) Αν f(x) = , να υπολογίσετε το 

**29**. α) Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο [α, β] και αντιστρέψιμη, να

 αποδείξετε ότι 

 β) Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο [α, β] και αντιστρέψιμη, με

 f(α) = β και f(β) = α, τότε να δείξετε ότι 

 γ) Έστω η συνάρτηση 

 Να υπολογίσετε το 

**30**. α) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο [-α, α], να δείξετε ότι

 

 β) Αν 0 < κ ≠ 1, f συνάρτηση άρτια και συνεχής και g συνάρτηση περιττή

 και συνεχής στο [-α, α], να δείξετε ότι 

 γ) Υπολογίστε τα ολοκληρώματα

 

**31.** Δίνεται η συνάρτηση f (x) = 

 α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

 β) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία

 γ) Έστω η συνάρτηση g (x) = 

 i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της και να τη μελετήσετε ως προς τη

 μονοτονία

 ii)Να βρείτε το 

**32**. α) Να αποδείξετε ότι 

 β) Υπολογίστε το 

**34.** Δίνονται οι συναρτήσεις 

 και g(x) = ln(1-x) – lnx

 α) Να μελετήσετε το πρόσημο της g

 β) Να αποδείξετε ότι η Cf έχει άξονα συμμετρίας την ευθεία x = 

 γ) Να κάνετε τον πίνακα μεταβολών της f

 δ) Αν α, β θετικοί αριθμοί με α + β = 1, να αποδείξετε ότι

 αln

 ε) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την Cf και τον x ΄x

**35**) Δίνεται η συνάρτηση 

α) Να βρείτε το 

β) να δείξετε ότι 

γ) να βρείτε το όριο της συνάρτησης , καθώς ο x τείνει στο άπειρο.