**ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ**

**ΟΡΙΟ – ΣΥΝΕΧΕΙΑ**

**ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ – ΕΠΙΛΟΓΗ:ΣΑΛΕΒΟΥΡΑΚΗΣ ΒΑΣΙΛΗΣ**

**2.3 Όριο συνάρτησης στο x0єR**

1. Αν ισχύει ότι , τότε να δείξετε ότι υπάρχει σύνολο της μορφής Α = (α,3)(3, β), έτσι ώστε για κάθε xєA, να ισχύει

 f(x)є(4,9999, 5,0001)

1. Nα βρείτε, αν υπάρχουν, τα παρακάτω όρια

 

1. Έστω η συνάρτηση f για την οποία ισχύει για κάθε xєR. Να βρείτε το 
2. Έστω η συνάρτηση f για την οποία ισχύει , για τιμές του x ¨κοντά¨ στο 2. Να βρείτε το 
3. Έστω η συνάρτηση f για την οποία ισχύει για κάθε xєR. Να βρείτε το 
4. Έστω η συνάρτηση f για την οποία ισχύει για κάθε xєR. Να βρείτε το 
5. Έστω η συνάρτηση f για την οποία ισχύει ,για κάθε xєR. Να βρείτε το 
6. Έστω η συνάρτηση f για την οποία ισχύει ,για κάθε xєR\*. Να βρείτε το 
7. Έστω οι θετικές συναρτήσεις f,g ορισμένες στο R και τέτοιες ώστε . Να βρείτε το 
8. Έστω οι συναρτήσεις f,g τέτοιες ώστε . Να βρείτε τα .
9. Να βρείτε,, αν υπάρχουν, τα όρια  Υπόδ.: Για το (iv) δείξτε πρώτα ότι 
10. α) Να δείξετε ότι 

β) Να βρείτε τον θετικό ακέραιο ν ώστε να ισχύει: 

13) Αν  και , τότε να δείξετε ότι 

 14) Αν , να βρείτε το 

 15) Αν για τις συναρτήσεις f, g ισχύουν:

 , να βρείτε τα

 

 16) Αν f, g δύο συναρτήσεις με πεδίο ορισμού το R και ισχύουν:

 , τότε να βρείτε το

 

 17) α) Να βρείτε το 

 β)Δίνεται η συνάρτηση f:R→R, η οποία είναι περιττή και ισχύει

 . Να βρείτε το 

 18) Αν f, g: R→R, δύο συναρτήσεις με f άρτια και g περιττή για τις οποίες

 ισχύει

 , τότε να βρείτε το 

 19) α) Να βρείτε το 

 β) Αν , να βρείτε το

 

20) Έστω η συνάρτηση f, : R→R, περιοδική με περίοδο 3, για την οποία

 ισχύει . Να βρείτε τα όρια:

 

**2.4 Μη πεπερασμένο όριο στο x0єR**

1) Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα όρια

 

2) Δίνεται η συνάρτηση 

 Να βρείτε τις τιμές των α,β,γєR, ώστε το  να είναι πεπερασμένο.

3) Αν , να βρείτε το 

4) Αν ,να βρείτε το 

5) Να βρείτε το 

6) Έστω η συνάρτηση f ορισμένη στο R με . Να βρείτε

 (i) το  (i) τον αριθμό λ ώστε 

1. Αν , να βρείτε τις τιμές των πραγματικών αριθμών α,β.
2. Να βρείτε τις τιμές των α,βєR, ώστε να ισχύει 
3. Να βρείτε για τις διάφορες τιμές των α,βєR, το 

10) Για τις διάφορες πραγματικές τιμές των α,β να προσδιορίσετε το

 

**2.5 Όριο συνάρτησης στο άπειρο**

1) Nα βρείτε, αν υπάρχουν, τα παρακάτω όρια

 

2) Για την  Να βρείτε τα παρακάτω όρια:

, , , , , 

3) Έστω η συνάρτηση f ορισμένη στο (1, +∞), τέτοια ώστε

 , να βρείτε το 

4) Να βρείτε τα όρια (i), (ii)

5) Να βρείτε τα όρια (i), (ii),(iii),

 (iv)  , (v) , (vi)

6) Έστω η συνάρτηση . Να βρείτε τα όρια

 (i), (ii) , (iii) 

7) Έστω η συνάρτηση  Να βρείτε τα όρια:

 , ,  

8) Να βρείτε τα παρακάτω όρια

 (i) , (ii) , (iii) 

9) Έστω η συνάρτηση 

 (α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της

 (β) Να βρείτε τα όρια (i), (ii) , (iii)  (iv) 

10) Αν , τότε να δείξετε ότι 

11) Έστω η συνάρτηση 

 (α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της

 (β) Να βρείτε τα όρια (i) , (ii)  (iii) 

12) Έστω η περιττή συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το R και τέτοια ώστε

 . Να βρείτε το 

**2.6 Συνέχεια συνάρτησης**

1) Αν συνεχής στο x0 και f(x0) =1, να αποδείξετε ότι υπάρχει δ>0

 ώστε για κάθε xє (x0-δ, x0+δ) να ισχύει f(x) < 1,00001

2) Αν συνεχής και , , τότε να δείξετε

 ότι το σύνολο τιμών της f είναι το R.

3) Έστω η συνάρτηση f συνεχής στο R με σύνολο τιμών το  και

 συνάρτηση g ορισμένη στο R-{1} με . Αν

  είναι πραγματικός αριθμός, να βρείτε το f(1)

4) Να μελετήσετε ως προς τη συνέχεια τη συνάρτηση 

5) Έστω η συνάρτηση f με πεδίο ορισμού  συνεχής και τέτοια ώστε

 , x < 0. Nα βρείτε τον τύπο της f.

6) Να βρείτε τον τύπο της συνεχούς και ορισμένης στο R συναρτήσεως f για την

 οποία ισχύει ότι .

7) Aν , να δείξετε ότι η f είναι συνεχής στο 0.

8) Για τη συνάρτηση f ορισμένη στο R ισχύει ότι

 ,για κάθε x,yєR. Nα δείξετε ότι η f είναι

 συνεχής στο R.

9) Nα δείξετε ότι οι παρακάτω εξισώσεις έχουν μία τουλάχιστον ρίζα στο

 Διάστημα που αναφέρεται παραπλεύρως

 

10) Να δείξετε ότι η εξίσωση x3-6x2+3=0, έχει δύο τουλάχιστον ρίζες στο (-1,1)

11) Να δείξετε ότι η εξίσωση x3+αx2+β=0 με β >0 και α+β+1<0, έχει δύο

 τουλάχιστον ρίζες στο (-1,1)

12) Να δείξετε ότι η εξίσωση x3+x-3=0, έχει μία μόνο ρίζα στο (1,3)

13) α) Να αποδείξετε ότι κάθε πολυωνυμική εξίσωση περιττού βαθμού έχει

 τουλάχιστον μία πραγματική ρίζα

 β) Να δείξετε ότι η εξίσωση x3+x=1,έχει μοναδική ρίζα στο R

14) Να δείξετε ότι η εξίσωση , έχει δύο

 ακριβώς ρίζες στο (α,γ)

15) Δίνεται η εξίσωση 

 (i) Nα δείξετε ότι η εξίσωση έχει ακριβώς δύο ρίζες στο (-1,1)

 (ii) Aν ρ1, ρ2 οι δύο αυτές ρίζες τότε να δείξετε ότι 

16) Nα δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f(x) = x και

 g(x) = συν2x, τέμνονται σε ένα τουλάχιστον σημείο του διαστήματος (0, )

17) Έστω οι συναρτήσεις f(x) = x2+αx+γ και g(x) = -x2+αx+γ, γ0. Αν ρ1 ρίζα

 της f και ρ2 ρίζα της g με ρ1<ρ2, τότε να δείξετε ότι η εξίσωση

 λf(x)+μg(x)=0, με λ>0 και μ>0, έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο (ρ1, ρ2).

18) Αν f συνεχής στο [α,β] και α2f(β)+β2f(α)=0 με α,β≠0, τότε να δείξετε ότι η

 εξίσωση f(x) = 0 έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο [α,β]

19) Αν οι συναρτήσεις f,g είναι συνεχείς στο [α,β] και

, τότε να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον x0є[α,β], τέτοιο ώστε f(x0)=g(x0)

20)(i) Αν οι συναρτήσεις f,g είναι συνεχείς στο [α,β] και

, τότε να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των f και g έχουν ένα τουλάχιστον κοινό σημείο στο [α,β].

(ii) Ένας πεζοπόρος για να διανύσει τη διαδρομή μέσα από ένα φαράγγι, ξεκινά στις 8.00 και φτάνει στην έξοδο στις 16.00. Την επόμενη μέρα και προκειμένου να επιστρέψει ξεκινά από την έξοδο στις 8.00 και φτάνει στην είσοδο στις 16.00. Να δικαιολογήσετε ότι υπάρχει μία τουλάχιστον χρονική στιγμή στη διάρκεια των δύο διαδρομών, κατά την οποία βρέθηκε στο ίδιο σημείο της διαδρομής.

21) Αν f συνεχής στο [1,e] και ισχύει , για κάθε xє[1,e), να δείξετε

 ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον x0є(1,e] τέτοιο ώστε f(x0)+x0lnx0=x0

22) Έστω η συνάρτηση f συνεχής στο R για την οποία ισχύει: f(x+2)+f(x)=0, για

 κάθε xєR. Να δείξετε ότι υπάρχει ξє[0,2] τέτοιο ώστε f(ξ)=f(ξ+1)

23) (i) Να βρείτε τα όρια:  και 

 (ii) Να δείξετε ότι η εξίσωση 5x2-1=ex(2x2+3), έχει μία τουλάχιστον

 πραγματική ρίζα.

24) (i) Να βρείτε το 

 (ii) Να δείξετε ότι η εξίσωση lnx+x=lnπ+ημx, έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο

 (0,π)

25) (i)Δίνεται η συνάρτηση f:(α, β) συνεχής και τέτοια ώστε

 = k και  = m. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση

  είναι συνεχής

 (ii) Nα βρείτε τα παρακάτω όρια  και

 

 (iii) Να δείξετε ότι η εξίσωση , έχει μία

 τουλάχιστον ρίζα στο (0,2)

26) Αν f συνεχής στο [α,β] και f(α)≠f(β), να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον

 x0є(α,β) τέτοιο ώστε 

27) Αν f συνεχής και γνησίως αύξουσα στο [α,β] και x1, x2, ,xνє[α,β], να δείξετε

 ότι υπάρχει x0є[α,β] τέτοιο ώστε 

 Να λύσετε το ίδιο πρόβλημα χωρίς το δεδομένο ότι η f είναι γν. αύξουσα.

28) Αν f συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο [0,4]. Να δείξετε ότι υπάρχει x0є[0,4]

 τέτοιο ώστε . Να λύσετε το ίδιο πρόβλημα

 χωρίς το δεδομένο ότι η f είναι γν. φθίνουσα.

29) Αν f συνεχής και γνησίως αύξουσα στο [α,β], να δείξετε ότι υπάρχει ένα

 τουλάχιστον x0є(α,β) τέτοιο ώστε 

 Να λύσετε το ίδιο πρόβλημα χωρίς το δεδομένο ότι η f είναι γν. αύξουσα.

30) Έστω η . Να εξετάσετε αν

 η f παίρνει την τιμή 7/2

31) (i) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα Δ και δεν μηδενίζεται σε

Αυτό (δηλ. f(x)≠0 για κάθε xєΔ), τότε να δείξετε ότι η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο Δ. Δώστε παράδειγμα από το οποίο να φαίνεται ότι η υπόθεση πως η f είναι ορισμένη σε διάστημα είναι απολύτως απαραίτητη για να ισχύει το συμπέρασμα.

 (ii) Aν f(x)≠0 για κάθε xєR και f(3)=-5, να δείξετε ότι η Cf βρίσκεται «κάτω»

 από τον άξονα x΄x

 (iii) Αν οι f, g είναι συνεχείς στο R και ισχύει f(x)≠g(x) xєR και

 f(0) >g(0), τότε να δείξετε ότι f(x)>g(x) για κάθε xєR

 (iv) Έστω η συνάρτηση f συνεχής στο R ώστε f(0)=-1 και f(x)≠2, για κάθε

 xєR.Να δείξετε ότι f(x)<2, για κάθε xєR.

 (v) Έστω η συνάρτηση f συνεχής στο R ώστε f(0)=2 και f(x)≠3, για κάθε xєR.

 Να δείξετε ότι δεν υπάρχει ξєR, ώστε f(ξ)=|ξ|+3

32) Έστω η συνάρτηση f με πεδίο ορισμού και σύνολο τιμών το [α,β] και τέτοια

 ώστε

, για κάθε x,yє[α,β]. Να αποδείξετε ότι

1. H f είναι συνεχής στο [α,β]
2. Η συνάρτηση g(x) = f(x)-x, είναι γνησίως φθίνουσα στο [α,β]
3. Υπάρχει μοναδικό x0 στο [α,β] ώστε f(x0)=x0

33) Δίνεται η συνάρτηση 

 (i) Nα βρείτε το πεδίο ορισμού της f

 (ii) Nα δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα

(iii)Nα μελετήσετε την f ως προς τη συνέχεια

1. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f
2. Να εξετάσετε αν οι παρακάτω εξισώσεις έχουν λύση

1) 

2) 

3)

34) Δίνεται η συνάρτηση f(x) = x5-x2+x+1, xє[-1,0]

 (i) Nα δείξετε ότι είναι γνησίως αύξουσα στο [-1,0]

 (ii) Να βρείτε το σύνολο των τιμών της

 (iii) Να εξετάσετε αν οι παρακάτω εξισώσεις έχουν λύση στο [-1,0]

 1) 

 2) π(x5-x2+x)=-π-e

 3) e(x5-x2+x)=-π-e