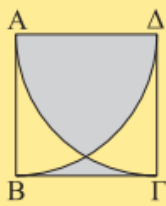


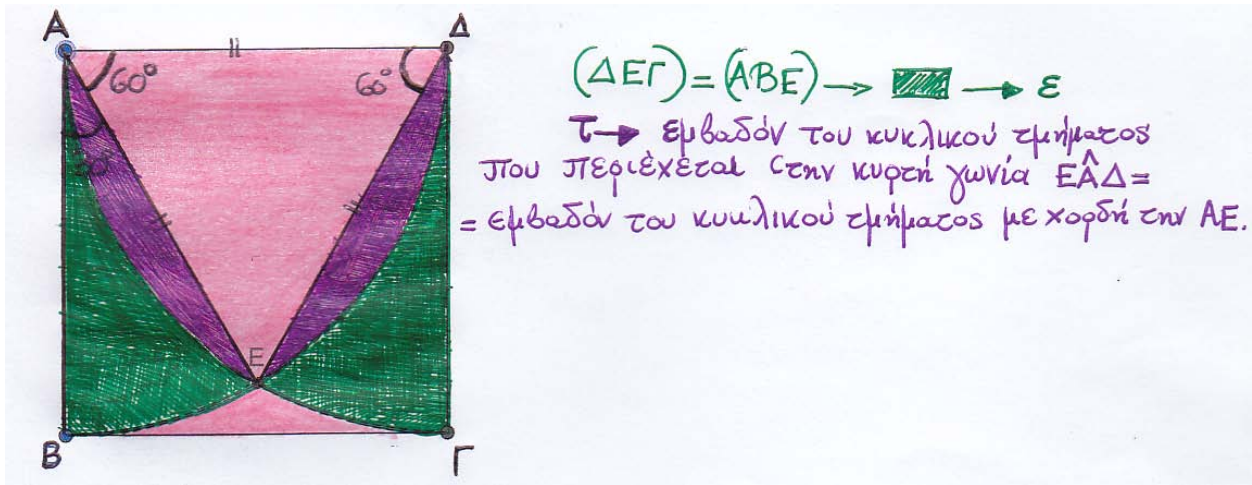
ΕΥΚΛΕΙΔΙΑ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ Β' ΛΥΚΕΙΟΥ

Άσκηση 2 / Αποδεικτικές της §11.8 (Τετραγωνισμός κύκλου)

2. Δίνεται τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ πλευράς a και τα τόξα $\widehat{B\Delta}$ και $\widehat{A\Gamma}$ των κύκλων (A, a) και (Δ, a) αντίστοιχα. Να βρεθεί το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου μέρους του τετραγώνου.



Λύση



Το ζητούμενο εμβαδόν E , της περιοχής που είναι σκιασμένη με τα χρώματα του ανοικτού και του σκουρόχρωμου μωβ (θυμίζει την προβολή ενός γεμάτου ποτηριού στο επίπεδο, ή την σκιά του), βρίσκεται αν από το εμβαδόν όλου του τετραγώνου αφαιρέσουμε τα δύο μεικτόγραμμα τρίγωνα ABE και $\Delta E\Gamma$. Είναι προφανές ότι τα εμβαδά των παραπάνω μεικτόγραμμων τριγώνων είναι ίσα, έστω με ϵ , αφού το καθένα από αυτά προκύπτει αν από το εμβαδόν του κυκλικού τομέα $A\widehat{B\Delta}$ ή του $\Delta\widehat{A\Gamma}$, αφαιρέσουμε το ίδιο εμβαδόν του κοινού μέρους των δύο κυκλικών τομέων, που δεν είναι άλλο από ένα άλλο μεικτόγραμμο τρίγωνο το AED . Οι δύο βέβαια προαναφερθέντες κυκλικοί τομείς έχουν ίσα εμβαδά. (γιατί;)

$$\text{Επομένως: } E = a^2 - 2\epsilon \quad (1)$$

Επίσης από το παραπάνω σχήμα, εύκολα διαπιστώνουμε ότι για το εμβαδόν ϵ ισχύει:

$$\epsilon = \frac{\pi a^2 90}{360} - \left(\frac{\pi a^2 60}{360} + \frac{\pi a^2 60}{360} - \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \right) \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \epsilon = \frac{a^2}{12} (3\sqrt{3} - \pi)$$

Οπότε με αντικατάσταση στην (1) βρίσκουμε ότι: $E = \frac{a^2}{6} (6 - 3\sqrt{3} + \pi)$.

Η παραπάνω άσκηση λύθηκε την Παρασκευή 22/04/2016, στην τάξη του Β₂ με την συνεργασία (κατ' αλφαβητική σειρά) των παρακάτω μαθητών:

1. Καρβέλα Σωτηρίου
2. Καρδούτσου Άγγελου
3. Κοντογεώργου Ηλιάνας
4. Κυλάκου Κυριάκου
5. Μακρογιάννη Ευθύμιου

Επιμέλεια: Τουρναβίτης Στέργιος
Μαθηματικός