<u>Ασκήσεις στους μιγαδικούς</u>

1.

Αν z μιγαδικός αριθμός με $|z| \le 1$ να βρεθεί η μέγιστη και ελάχιστη τιμή της παράστασης $|z-3|$.

2.

Έστω z=x+yi, $(x, y \in R)$. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων M(z) του μιγαδικού επιπέδου όταν $|z-1+2i| = |z-\sqrt{3i}|$

3.

Να προσδιοριστεί ο $z \in C$ για τον οποίο ισχύει

$$|z-i| = |z-2| = |z-2i|$$

4.

Άν $|z_1-i| = 1$ καί $|z_2-5| = 2$ νά βρεθεῖ γεωμετρικά τό max $|z_1-z_2|$ καί τό min $|z_1-z_2|$.

5. Αν $A(z_1), B(z_2), \Gamma(z_3)$ είναι σημεία του κύκλου $x^2+y^2=1$ τότε

α) Να αποδείξετε ότι $|z_1+z_2+z_3| = \left|\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}+\frac{1}{z_3}\right|$.

6.

ΘΕΜΑ Β

Έστω ο μιγαδικός αριθμός z = x+yi με $x, y \in \mathbb{R}$.

Β1. Αν ισχύει ότι $2z - i\bar{z} = 3$, τότε να βρείτε τον μιγαδικό αριθμό z.

Μονάδες 8

Β2. Αν z=2+i, τότε να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών w για τους οποίους ισχύει ότι: $|w+z| = |z^2|$.

Μονάδες 7

Β3. Αν z=2+i και $u=\frac{\bar{z}+iz}{\bar{z}-1}$, τότε να αποδείξετε ότι: $u^{2010}=-1$.

Μονάδες 10

7.

Έστω z ένας μιγαδικός και $f(\nu) = i^{\nu} z,\ \nu \in N^*$.

α) Να αποδείξετε ότι:

$$f(3) + f(8) + f(13) + f(18) = 0$$

β) Αν $|z| = 2$, M είναι η εικόνα του z και το $\overrightarrow{OM}$ σχηματίζει γωνία $\frac{\pi}{3}$ με τον άξονα x΄x, να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου, του οποίου κορυφές είναι οι εικόνες των μιγαδικών 0, z, και $f(13)$.

8. Ασκήσεις Σωστού – Λάθους, αντιστοίχησης και αποδεικτικές από θεωρία.

Αν z ένας μιγαδικός αριθμός και $\bar{z}$ ο συζυγής του, τότε ισχύει $|z| = |\bar{z}| = |-z|$.
Σ Λ

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z_1, z_2. Να αποδείξετε ότι: $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$.

Α.2. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.*

Για κάθε μιγαδικό αριθμό z ισχύει:

α. $|z|^2 = z\bar{z}$

β. $|z^2| = z^2$

γ. $|z| = -|\bar{z}|$

δ. $|z| = |\bar{z}|$

ε. $|i\,\bar{z}| = |z|$

Β.1. Αν:

$$z_1 = 3 + 4i \text{ και } z_2 = 1 - \sqrt{3}i,$$

να γράψετε στο τετράδιό σας τους αριθμούς της **Στήλης Α** και δίπλα σε κάθε αριθμό το γράμμα της **Στήλης Β** έτσι, ώστε να προκύπτει ισότητα.

Στήλη Α	Στήλη Β
1. $\lvert z_1 \cdot z_2 \rvert$	**α.** 4
2. $\lvert z_1^2 \rvert$	**β.** 2
3. $\lvert z_2 \rvert^2$	**γ.** 25
4. $-\lvert \overline{z_1} \rvert$	**δ.** −5
5. $\lvert i z_2 \rvert$	**ε.** −2
	στ. 5
	ζ. 10

Αν για το μιγαδικό αριθμό z ισχύει $|z| = 1$, να δείξετε ότι:

$$\bar{z} = \frac{1}{z}$$

9.

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί $z = α + βi$, όπου $α, β \in IR$ και $w = 3z - i\bar{z} + 4$ όπου $\bar{z}$ είναι ο συζυγής του z.

α. Να αποδείξετε ότι

$Re(w) = 3α - β + 4$

$Im(w) = 3β - α$.

Μονάδες 6

β. Να αποδείξετε ότι, αν οι εικόνες του w στο μιγαδικό επίπεδο κινούνται στην ευθεία με εξίσωση $y = x - 12$, τότε οι εικόνες του z κινούνται στην ευθεία με εξίσωση $y = x - 2$.

Μονάδες 9

γ. Να βρείτε ποιος από τους μιγαδικούς αριθμούς z, οι εικόνες των οποίων κινούνται στην ευθεία με εξίσωση $y = x - 2$, έχει το ελάχιστο μέτρο.

Μονάδες 10

10.

• X 158. Ἄν $z_1+z_2+z_3=0$ καί $|z_1| = |z_2| = |z_3| = α$, $α>0$ νά δειχθεῖ ὅτι οἱ εἰκόνες τῶν z_1, z_2, z_3 στό μιγαδικό ἐπίπεδο εἶναι κορυφές ἰσόπλευρου τριγώνου, πού εἶναι ἐγγεγραμμένο σέ κύκλο ἀκτίνας α.

Η άσκηση αυτή είναι μία «παραλλαγή» ενός θέματος που δόθηκε σε πανελλαδικές εξετάσεις.

11.

Δίνεται ο μιγαδικός αριθμός

$$z = \frac{2 + \alpha i}{\alpha + 2i} \qquad \text{με } \alpha \in \mathbb{R}.$$

α. Να αποδειχθεί ότι η εικόνα του μιγαδικού z ανήκει στον κύκλο με κέντρο $O(0,0)$ και ακτίνα $\rho = 1$.

Μονάδες 9

β. Έστω z_1, z_2 οι μιγαδικοί που προκύπτουν από τον τύπο

$$z = \frac{2 + \alpha i}{\alpha + 2i}$$

για $\alpha = 0$ και $\alpha = 2$ αντίστοιχα.

i. Να βρεθεί η απόσταση των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z_1 και z_2.

Μονάδες 8

ii. Να αποδειχθεί ότι ισχύει:

$$(z_1)^{2\nu} = (-z_2)^{\nu}$$

για κάθε φυσικό αριθμό ν.

Μονάδες 8

12.

Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί z για τους οποίους ισχύει

$$|z| = |z - 2i|$$

Β1. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z στο μιγαδικό επίπεδο είναι η ευθεία με εξίσωση $\psi = 1$

Μονάδες 7

Β2. Από τους παραπάνω μιγαδικούς αριθμούς z, να βρείτε εκείνους που έχουν μέτρο ίσο με $\sqrt{2}$

Μονάδες 10

Β3. Έστω $z_1 = 1 + i$ και $z_2 = -1 + i$ οι μιγαδικοί αριθμοί που βρήκατε στο ερώτημα Β2.

Να αποδείξετε ότι $z_1^4 + z_2^4 = -8$

Μονάδες 8

13.

Έστω z μιγαδικός αριθμός, με $z \neq \pm i$ και $w = \dfrac{z}{z^2+1}$.

α) Να αποδείξετε ότι αν ο w είναι πραγματικός, τότε ο z είναι πραγματικός ή $|z| = 1$.

Μονάδες 10

β) Να λύσετε, στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών, την εξίσωση $\dfrac{z}{z^2+1} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Μονάδες 10

γ) Αν z_1, z_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης του ερωτήματος (β), να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$K = \frac{(z_1 \cdot z_2)^3 - i}{4 + (z_1 + z_2)^2} \quad .$$

Μονάδες 5

14.

Αν για τους μιγαδικούς αριθμούς z και w ισχύουν

$$\left|(i + 2\sqrt{2})z\right| = 6 \quad \text{και} \quad |w - (1-i)| = |w - (3-3i)|$$

τότε να βρείτε:

α. το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z .

Μονάδες 6

β. το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών w .

Μονάδες 7

γ. την ελάχιστη τιμή του $|w|$

Μονάδες 6

δ. την ελάχιστη τιμή του $|z - w|$

Μονάδες 6

15.

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς

$$z=(2\lambda+1)+(2\lambda-1)i\ , \qquad \lambda\in\mathbb{R}$$

Α.α. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας πάνω στην οποία βρίσκονται οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών z, για τις διάφορες τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$

Μονάδες 9

β. Από τους παραπάνω μιγαδικούς αριθμούς να αποδείξετε ότι ο μιγαδικός αριθμός $z_0=1-i$ έχει το μικρότερο δυνατό μέτρο.

Μονάδες 8

Β. Να βρεθούν οι μιγαδικοί αριθμοί w οι οποίοι ικανοποιούν την εξίσωση

$$|w|^2+\overline{w}-12=z_0$$

όπου z_0 ο μιγαδικός αριθμός που αναφέρεται στο προηγούμενο ερώτημα.

Μονάδες 8

<u>Επιμέλεια</u>: Τουρναβίτης Στέργιος

Μαθηματικός